Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

16-1 | 2012
From Practice to Results in Logic and Mathematics

Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere

Baptiste Mélès

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/725
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.725
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 1 avril 2012
Pagination : 153-182
ISBN : 978-2-84174-581-4
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Baptiste Mélès, « Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 16-1 | 2012, mis en ligne le 01 avril 2015, consulté le 19 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/725 ; DOI : 10.4000/philosophiascientiae.725

Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere *

Baptiste Mélès
Université de Clermont-Ferrand II (France)

Résumé : Les concepts de paradigme et de thématisation, par lesquels Jean Cavaillès décrit dans l'ouvrage posthume *Sur la Logique et la théorie de la science* la dynamique de l'activité mathématique, trouvent dans la théorie des catégories à la fois une illustration et une formalisation, et dans la dialectique hégélienne un précédent. Dans un premier temps, nous examinerons cette hypothèse, non sans définir le concept de thématisation et les quelques notions élémentaires de théorie des catégories qui nous serviront par la suite. Ensuite, en supposant hégélienne la notion de « dialectique » employée par Cavaillès, nous vérifierons si le concept de « thématisation » peut prétendre décrire le processus dialectique de la logique hégélienne, interprétation dont nous trouverons l'esquisse chez William Lawvere. Enfin, nous mettrons à l'épreuve cette interprétation en analysant la dialectique hégélienne de l'être et du néant dans la *Science de la logique* et les *Leçons sur l'histoire de la philosophie*. Nous verrons ainsi comment la dialectique hégélienne peut tout à la fois décrire la pratique mathématique et s'y voir représenter.

Abstract: Concepts of both paradigm and thematization, through which Jean Cavaillès describes the dynamics of mathematical activity, in the posthumous book *Sur la Logique et la théorie de la science*, find in the category theory an illustration as well as a formalization, and find too a precedent

*. Ce texte fut d'abord prononcé, sous des formes partielles mais convergentes, sous les titres « Jean Cavaillès entre Hegel et la théorie des catégories » (colloque « Concepts purs, concepts appliqués » organisé par le groupe PhénoMath, Université de Nice, 10 décembre 2010), puis « Logique hégélienne et théorie des catégories chez William Lawvere » (journée d'études « Modèles mathématiques pour la philosophie », organisée par l'auteur, Maison des sciences de l'homme de Clermont-Ferrand, 26 mars 2011). L'auteur remercie vivement Jocelyn Benoist, Sylvain Cabanacq, Marion Duquerroy, Thierry Paul, Andrei Rodin et Hourya Sinaceur, ainsi que les éditeurs et les relecteurs anonymes de la revue. Il dédie ce texte à Élisabeth Schwartz et à sa proche famille.

Philosophia Scientiæ, 16 (1), 2012, 153–182.

in the Hegelian dialectic. First, we will examine this assumption and will also make sure to define, as a basis for our later development, the concept of thematization and some basic notions of category theory. In supposing then as Hegelian the notion of 'dialectic' used by Cavaillès, we will check if the concept of 'thematization' can claim to describe the Hegelian interpretation's dialectical process. This kind of interpretation can be found in William Lawvere's writings. Finally, we will put the interpretation to the test in analyzing the Hegelian dialectic about being and nothingness in the *Science of Logic* and the *Lectures on the History of Philosophy.* Consequently we will see how the Hegelian dialectic can, in the same time, describe the mathematical practice and be represented by it.

Introduction

Nous soutiendrons ici l'hypothèse selon laquelle les concepts de paradigme et de thématisation, par lesquels Jean Cavaillès décrit dans l'ouvrage posthume *Sur la logique et la théorie de la science* la dynamique de l'activité mathématique, trouvent dans la théorie des catégories à la fois une illustration et une formalisation [2], et dans la dialectique hégélienne un précédent.

Dans un premier temps, nous examinerons cette hypothèse, non sans définir le concept de thématisation et les quelques notions élémentaires de théorie des catégories qui nous serviront par la suite. Ensuite, en supposant hégélienne la notion de « dialectique » employée par Cavaillès, nous vérifierons si le concept de « thématisation » peut prétendre décrire le processus dialectique de la logique hégélienne, interprétation dont nous trouverons l'esquisse chez William Lawvere. Enfin, nous mettrons à l'épreuve cette interprétation en analysant la dialectique hégélienne de l'être et du néant dans la *Science de la logique* et les *Leçons sur l'histoire de la philosophie*.

Nous verrons ainsi comment la dialectique hégélienne peut tout à la fois décrire la pratique mathématique et s'y voir représenter.

1 De Cavaillès à la théorie des catégories

1.1 Paradigme et thématisation chez Jean Cavaillès

Dans la deuxième partie de *Sur la logique et la théorie de la science*, Cavaillès observe dans l'histoire des mathématiques un double « processus de séparation [3] », par « paradigme » et par « thématisation » [Cavaillès 2008, 27].

2. Restreinte au second aspect, celui de la formalisation, cette hypothèse a été formulée par Jean-Toussaint Desanti [Desanti 1999, 223–225].

3. Parmi les meilleurs commentaires de ce passage figurent ceux de Hourya Sinaceur [Sinaceur 1994, 95 *sq.*] et de Gilles-Gaston Granger [Granger 1988, 70–81].

Il existe d'une part un processus « longitudinal, ou coextensif à l'enchaînement démonstratif », qui est celui du « paradigme ». Le « raisonnement arithmétique sur le nombre entier fini » a ainsi donné lieu, par généralisation, aux « enchaînements les plus abstraits » [Cavaillès 2008, 27] de l'algèbre. D'un point de vue formel, cette généralisation est celle par laquelle les constantes originelles se voient remplacer par des variables : « en remplaçant les déterminations d'actes par la place vide pour une substitution, on s'élève progressivement à un degré d'abstraction qui donne l'illusion d'un formel irréductible » [Cavaillès 2008, 29]. Les exemples de cette généralisation fourmillent dans l'histoire des mathématiques :

> Tels les essais de caractéristique géométrique ou algébrique, la théorie des déterminants, le symbolisme du calcul infinitésimal où chaque fois se manifeste le désir de ne conserver que ce qui est d'essence ; telle enfin la réduction de tous les jugements au jugement prédicatif, de tout raisonnement à la répétition ou au morcellement d'une formule unique et identique. [Cavaillès 2008, 30]

Le paradigme est une généralisation portant sur les objets. Mais à lui seul, il ne saurait expliquer tout entière la dynamique à l'œuvre dans l'histoire des mathématiques.

Les mathématiques ne sont pas seulement connaissance d'objets, mais aussi connaissance d'actes : « La formalisation n'est réalisée que lorsqu'au dessin des structures se superposent systématisées les règles qui les régissent » [Cavaillès 2008, 30]. Orthogonalement à la généralisation d'objets qui remplace les constantes d'origine par des variables, il existe une généralisation d'actes qui abstrait les règles de transformation de ces variables. C'est ici qu'intervient la « thématisation », processus « vertical ou instaurant un nouveau système de liaison qui utilise l'ancien comme base de départ, et non plus stade traversé par un mouvement, mais objet de réflexion dans son allure actuelle » [Cavaillès 2008, 27]. Dans ce nouveau processus, ce ne sont plus les objets de base qui importent, mais les transformations auxquelles ils sont soumis : « La *thématisation* prend pour départ l'enchaînement saisi cette fois dans son vol, trajectoire qui se mue en sens. La pensée ne va plus vers le terme créé mais part de la façon de créer pour en donner le principe par une abstraction de même nature que l'autre, mais dirigée transversalement » [Cavaillès 2008, 30].

Cavaillès en mentionne quelques exemples, principalement mathématiques : « théorie des groupes, théorie des opérations linéaires, des matrices, topologie des transformations topologiques » [Cavaillès 2008, 31] ; mais ce geste est également à l'œuvre en logique avec la théorie de la démonstration, qui prend pour objets ce qui, dans les raisonnements, n'était encore que des actes — introduction de la conjonction, élimination de l'implication, etc.

Un exemple commun marquera la différence entre paradigme et thématisation. Les vecteurs peuvent être vus comme une généralisation *par para-*

digme des nombres, qui obéit, pour une part, aux mêmes lois (associativité et commutativité de l'addition, multiplication scalaire, etc.). Au cours de cette généralisation, les objets ont certes changé de nature, puisqu'ils adoptent la forme $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ au lieu de la simple forme a ; mais ils n'en restent pas moins des objets. De leur côté, les actes restent des actes : on n'additionne plus tout à fait les mêmes objets, mais il s'agit toujours d'opérations réglées sur les objets. En revanche, l'algèbre linéaire dans son ensemble contient la généralisation *par thématisation* du calcul vectoriel. Étudier les applications linéaires et leurs relations, c'est prendre pour objet ce qui précédemment avait le statut d'acte. L'*acte* de transformer des vecteurs devient lui-même un *objet*, typiquement une matrice, sur lequel de nouveaux *actes* sont possibles, notamment la composition par multiplication matricielle. Si le paradigme transforme les objets en objets et les actes en actes, la thématisation fait abstraction des objets et transforme les actes en objets.

Ce dernier exemple montre que les deux processus de généralisation, loin d'être exclusifs, doivent être considérés dans leur interaction : « Il n'y a pas de formalisme sans syntaxe, pas de syntaxe sans un autre formalisme qui la développe » [Cavaillès 2008, 33]. La thématisation peut en effet à son tour donner lieu à une généralisation par paradigme : c'est par thématisation que l'on abstrait l'idée de groupe à partir de permutations sur un ensemble particulier, mais par paradigme que l'on passe de ce groupe particulier à la notion générale de groupe ; puis à nouveau par thématisation que l'on considère, sous le nom d'homomorphismes de groupe, les actes par lesquels on peut passer d'un groupe à l'autre. Aucun des deux processus n'est donc définitif : l'histoire des mathématiques est l'alternance des deux gestes.

Ce double processus de généralisation est responsable de la nature « dialectique » de l'histoire des mathématiques — thèse formulée dans toute sa généralité dans la dernière page de *Sur la logique et la théorie de la science* [Cavaillès 2008, 78], mais qui traverse déjà les premiers ouvrages, notamment *Méthode axiomatique et formalisme*, où Cavaillès renvoie au concept husserlien de « faculté thématisante des mathématiques [4] », que dans l'ouvrage posthume il détache pourtant, comme l'a observé Hourya Sinaceur, de toute référence à l'activité de la conscience :

4. Dans cet ouvrage, Cavaillès évoque les généralisations des concepts d'addition et de multiplication [Cavaillès 1981, 49 *sq.*], définit la thématisation comme « transformation d'une opération en élément d'un champ opératoire supérieur, [par] exemple topologie des transformations topologiques (essentielles d'une façon générale en théorie des groupes) » [Cavaillès 1981, 177]. Et c'est dans une note que Cavaillès semble attribuer à Husserl la paternité du concept de thématisation : « La notion de type — introduite par Russell pour échapper au paradoxe qu'il avait découvert dans la théorie des ensembles — répond à ce que Husserl [*Logique formelle et logique transcendantale*] appelle la faculté thématisante des mathématiques : toute propriété d'un objet peut devenir à son tour objet et posséder des propriétés » [Cavaillès 1981, 105 n. 1].

> La thématisation n'est pas, pour Cavaillès, l'effet d'un acte du sujet (transcendantal) tournant son « regard » ou son intérêt vers un quelque chose constitué ainsi en objet. Elle est une modalité fondamentale de l'expérience (ou connaissance) mathématique, celle-ci étant privilégiée comme prototype de l'activité rationnelle essentiellement progressive. La construction des objets n'est pas constitution au sens phénoménologique du terme. [Sinaceur 1990, 2582]

Or la théorie des catégories a joué vis-à-vis des concepts de paradigme et de thématisation un rôle double, puisqu'elle en est à la fois une illustration parmi d'autres, et la formalisation par excellence.

1.2 La théorie des catégories comme illustration et formalisation

1.2.1 Catégories et morphismes

La théorie des catégories peut être décrite comme une théorie des morphismes. Contrairement à la théorie des ensembles, qui ne définit des morphismes entre ensembles ou entre structures qu'après les avoir explicitement définis — c'est-à-dire après avoir précisé d'abord la nature des objets sur lesquels agiront ces morphismes — la théorie des catégories étudie les propriétés des morphismes en faisant abstraction de la nature des objets concernés.

La fonction première de cette théorie est en quelque sorte de factoriser un certain nombre de résultats qui, sans elle, se verraient répartir dans autant de théories qu'il y a d'espèces de structure. Par exemple, on définira la notion d'application en théorie des ensembles, la notion d'homomorphisme en théorie des groupes, la notion d'application linéaire en algèbre linéaire, la notion d'application continue en topologie, etc., alors que ces notions présentent des caractéristiques communes dont on pourrait traiter une fois pour toutes. De même, il existe un air de famille entre le produit cartésien pour les ensembles, le produit direct pour les groupes, le produit d'espaces vectoriels en algèbre linéaire, etc. Au lieu de feindre la surprise en apprenant les propriétés de chacun de ces concepts, on peut unifier leur théorie.

C'est cette unification des mathématiques « par le haut » que Charles Ehresmann voit à l'œuvre dans la théorie des catégories :

> Actuellement, dans un ouvrage consacré à l'étude des structures mathématiques d'une espèce donnée quelconque (par exemple les topologies, les groupes, ...), l'auteur commence généralement par définir les structures en question, puis à introduire les notions d'isomorphisme et d'homomorphisme entre ces structures (par exemple les homéomorphismes et les applications continues) ; ensuite il étudie les sous-structures et les structures quotient. Il est

donc naturel de se demander s'il existe une notion unificatrice pour toutes ces théories diverses, comme la notion de groupe qui a permis de rétablir l'unité de la Géométrie après la découverte des géométries non euclidiennes ». [Ehresmann 1965, VII]

Mais expliquons par quelques exemples simples cette notion de morphisme. Un morphisme est ce qui, à un objet, en associe un autre ; on peut le concevoir comme un processus de transformation. Tel est par exemple le morphisme « hachoir » qui transforme la vache en steak haché, et que l'on peut représenter de la manière suivante :

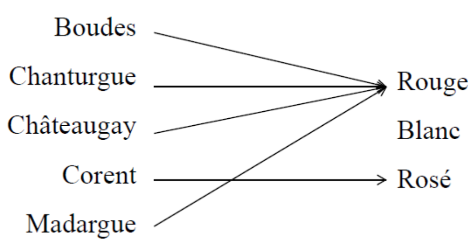
$$\text{vache} \xrightarrow{\text{hachoir}} \text{steak}$$

D'un point de vue plus mathématique, un morphisme peut être l'application d'un ensemble dans un autre, par exemple la fonction qui, à un nombre, associe son carré :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x^2} \mathbb{R}$$

On peut également décrire un morphisme en ayant recours à des diagrammes internes, c'est-à-dire en rendant explicite la composition interne des objets concernés par notre morphisme. Voici par exemple le morphisme « AOC », qui dans un futur proche déterminera la robe des différents côtes-d'auvergne :

$$\text{côtes-d'auvergne} \xrightarrow{\text{AOC}} \text{robe}$$

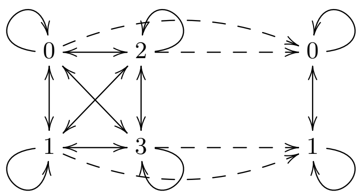


Entre des ensembles, les morphismes sont des *applications* : ce que l'on exprime en théorie des catégories en disant que la catégorie des ensembles est celle dont les objets sont des ensembles et les morphismes des applications. Plus généralement, *toute catégorie est la donnée d'un certain type d'objets et d'un certain type de morphismes.*

Toute application est un morphisme, mais tout morphisme n'est pas une application : en particulier, un morphisme peut exister entre deux structures mathématiques. On peut par exemple définir la catégorie des graphes, dont les objets sont des graphes, et les morphismes, des « morphismes de graphes ».

Ainsi, entre les rues d'une ville et le plan de cette ville, il existe un morphisme qui à chaque carrefour associe sur le plan un sommet, et à chaque sens de circulation de chaque rue associe une flèche. Il n'existe donc pas seulement des morphismes d'éléments, mais également des morphismes de morphismes. La seule restriction est que le morphisme préserve la structure de graphe.

De même, on peut définir la catégorie des groupes, dont les objets sont les groupes, et les morphismes les *homomorphismes de groupe*. Soit par exemple le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, c'est-à-dire le groupe des nombres entiers modulo 4. Nous pouvons définir un morphisme de ce groupe vers le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, comme l'indiquera un schéma représentant de manière intuitive les deux groupes et leur morphisme :



Ce morphisme préserve la structure de groupe : il s'agit donc bien d'un homomorphisme de groupes, ou en d'autres termes d'un morphisme dans la catégorie des groupes.

Comme le résument Andrea Asperti et Giuseppe Longo,

> Le point de départ de la théorie des catégories est le principe que toute sorte d'objet mathématique structuré vient équipé d'une notion de transformation ou de construction « acceptable », c'est-à-dire d'un morphisme qui préserve la structure de l'objet. [Asperti & Longo 1991, 43]

Ce point de vue est expressément revendiqué par le confondateur de la théorie qu'est Saunders Mac Lane :

> La théorie des catégories demande à propos de chaque type d'objet mathématique : « Quels sont les morphismes ? » ; elle suggère que ces morphismes devraient être décrits en même temps que les objets. [Mac Lane 1969, 30]

Et c'est précisément à cela que l'on reconnaît un catégoriste ; dans une lettre, le bourbakiste historique André Weil, notoirement hostile à la théorie des catégories, écrit à Claude Chevalley : « Comme tu sais, mon honorable collègue Mac Lane soutient que toute notion de structure comporte nécessairement une notion d'homomorphisme. » À la suite de quoi, Weil demande à Chevalley ce que, selon lui, on peut bien gagner à ce type de considérations. D'après Ralf Krömer et le témoignage de Pierre Cartier, l'hostilité de Weil à la théorie des catégories est la cause principale du silence de Bourbaki à son endroit.

Parmi les morphismes, il en est un qui se distingue particulièrement : il s'agit du morphisme *identité*, qui se contente de préserver l'objet tel qu'il est. On peut le représenter notamment par une boucle :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Dans la catégorie des ensembles, le morphisme identité n'est autre que l'application identité ; dans la catégorie des groupes, il s'agit de l'homomorphisme identité, etc.

On voit donc que la notion fondamentale de la théorie des catégories est celle de morphisme, qui s'étend, de manière très générale, aussi bien à de simples ensembles dénués de structure qu'à des structures mathématiques de quelque richesse que ce soit. On peut ainsi définir les foncteurs comme morphismes agissant sur des catégories, et les transformations naturelles comme morphismes agissant sur des foncteurs.

<table>
<tr><td>ensemble</td><td>actions de groupe</td></tr>
<tr><td colspan="2">groupe</td><td>homomorphismes</td></tr>
<tr><td colspan="3">catégories des groupes, monoïdes, etc.</td><td>foncteurs</td></tr>
<tr><td colspan="4">catégorie des foncteurs</td><td>transformations naturelles</td></tr>
<tr><td colspan="5">⋮</td><td>⋱</td></tr>
</table>

1.2.2 Constructions élémentaires

La composition Une fois définie la notion de morphisme, il est essentiel de définir la composition de morphismes, qui consiste intuitivement en une succession de morphismes. On notera ainsi la composition $g \circ f$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "g\circ f"] & & C \end{tikzcd}$$

Dans la catégorie des ensembles, la composition de morphismes est la *composition d'applications* : par exemple, le morphisme « grand-père maternel » correspond à la composition des morphismes « mère » et « père » :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\text{père}"] & \\ A \arrow[ur, "\text{mère}"] \arrow[rr, dashed, "\text{grand-père}"] & & C \end{tikzcd}$$

Sans grande difficulté, on peut transposer la composition de morphismes à d'autres catégories que les ensembles, par exemple à la catégorie des groupes :

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+) \arrow[dr, "g"] & \\
(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+) \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "g\circ f"] & & (\{0\},+)
\end{tikzcd}$$

Ces quelques définitions nous permettent de définir une catégorie en toute généralité. Une *catégorie* est en effet composée :

1. d'objets ;
2. de morphismes entre ces objets ;
3. d'un morphisme identité pour chaque objet ;
4. d'une composition de morphismes qui soit associative, c'est-à-dire que

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f.$$

Le produit De nombreuses catégories peuvent être munies d'un produit. Plutôt que de donner la définition abstraite de ce concept [5], nous dirons simplement que le produit de deux objets, quand il existe, est accompagné de deux projections qui permettent d'obtenir l'un et l'autre objet.

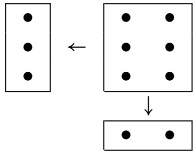
Nous ne le montrerons que par quelques exemples. D'abord, le cylindre est le produit d'un cercle et d'un segment : on peut en effet le munir de deux projections qui permettent de le déterminer complètement : en connaissant deux de ses ombres portées soigneusement choisies, on peut rétablir tout le volume du cylindre. Il n'est rien dans le cylindre que l'on ne retrouve par ses projections respectives.

Ensuite, le produit de deux ensembles n'est autre que leur *produit cartésien*. Soient par exemple deux ensembles finis, l'un de deux et l'autre de trois éléments ; on peut représenter en un rectangle leur produit cartésien.

---

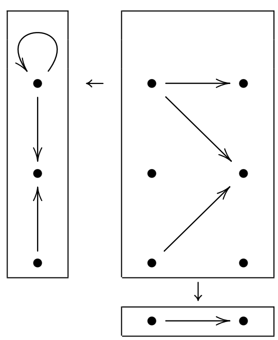
5. Selon la définition abstraite, un objet $A\times B$ accompagné d'une paire de morphismes $\pi_1 : A\times B \longrightarrow A$ et $\pi_2 : A\times B \longrightarrow B$ est appelé produit de A et B si pour tout objet C et pour toute paire de morphismes $f_1 : C \longrightarrow A$ et $f_2 : C \longrightarrow B$, il existe exactement un morphisme $f : C \longrightarrow A\times B$ tel que $f_1 = \pi_1\circ f$ et $f_2 = \pi_2\circ f$, c'est-à-dire que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

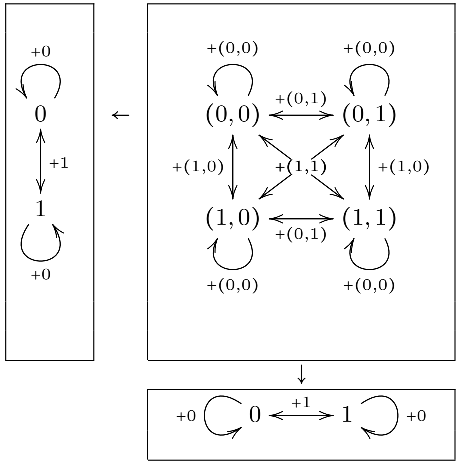


On définit ce produit cartésien en associant un élément à chaque couple d'éléments tirés de l'un et l'autre ensemble.

Nous donnerons un exemple supplémentaire, qui présente l'avantage d'appartenir à une structure et non simplement à un ensemble : il s'agit du *produit de graphes*. Leur produit peut être obtenu en procédant d'abord de la même manière que pour le produit cartésien dans la catégorie des ensembles, c'est-à-dire en « multipliant » les éléments les uns par les autres. Mais cela ne saurait suffire, car il n'est plus question du produit de deux ensembles, mais de deux structures. Il faut donc ensuite composer les morphismes de l'un et l'autre graphe.



À partir de cet exemple, on trouve facilement comment engendrer le *produit direct*, qui n'est autre que le produit dans la catégorie des groupes. Soient en effet par exemple les groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. Par produit direct des ensembles de base de ces groupes, nous obtenons un ensemble à quatre éléments ; puis par composition des morphismes respectifs des deux groupes, on obtient bien un nouveau groupe, en l'occurrence le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$:



L'intérêt de la théorie des catégories est de désigner par un seul nom et d'élaborer par une seule méthode de construction des concepts relevant de théories mathématiques très diverses.

La somme – La somme, souvent appelée coproduit [6], est le dual du produit. Intuitivement, elle correspond à la fusion de deux structures en une seule, dans laquelle on prend garde d'éviter tout télescopage non contrôlé [7].

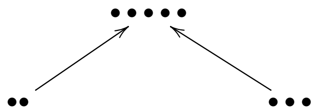
Par exemple, le coproduit de deux ensembles correspond à leur *union disjointe* ; c'est-à-dire que les deux ensembles sont bien « réunis » en un troisième, mais en veillant à compter deux fois les éléments qui se trouveraient à la fois de part et d'autre. Ainsi, l'union disjointe des ensembles $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c\}$ ne serait pas $A \cup B = \{a, b, b, c\} = \{a, b, c\}$, mais $A \sqcup B = \{a, b_1, b_2, c\}$, le renommage

6. Nous privilégierons le premier terme, qui est plus intuitif ; mais en toute rigueur il est préférable de n'utiliser le terme de somme que dans le cadre des catégories distributives (cf. *infra*, p. 171).

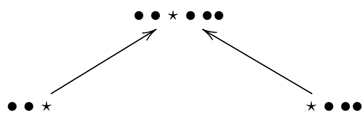
7. Selon la définition abstraite, un objet $A + B$ accompagné d'une paire de morphismes $i_1 : A \longrightarrow A + B$ et $i_2 : B \longrightarrow A + B$ est appelé coproduit de A et B si pour tout objet C et pour toute paire de morphismes $f_1 : A \longrightarrow C$ et $f_2 : B \longrightarrow C$, il existe exactement un morphisme $f : A + B \longrightarrow C$ tel que $f \circ i_1 = f_1$ et $f \circ i_2 = f_2$, c'est-à-dire que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & A + B \arrow[u, dashed, "f"'] & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

permettant de bien distinguer les deux occurrences de l'élément b.



Dans certains cas, la somme peut exiger un télescopage, mais celui-ci doit toujours être soumis à un contrôle strict. Par exemple, la somme de deux *espaces pointés* $\{x_0, a, b\}$ et $\{x_0, c, d\}$ doit bien être $\{x_0, a, b, c, d\}$: l'ensemble pointé d'arrivée ne peut contenir qu'un seul point de base, où confluent les deux points de base de départ.



De même, la *somme directe* d'espaces vectoriels envoie chaque vecteur trivial des espaces vectoriels de départ vers l'unique vecteur trivial de l'espace vectoriel d'arrivée.

La somme est donc intuitivement ce qui rassemble le contenu de deux objets, en ne tolérant de télescopage que ce qui est indispensable à la préservation de la structure des objets : ainsi l'union disjointe préserve la structure d'ensemble, la somme d'ensembles pointés préserve la structure d'ensemble pointé (ce qui ne serait pas le cas si l'on conservait *deux* points de base), la somme directe d'espaces vectoriels préserve la structure d'espace vectoriel.

Une fois encore, la théorie des catégories permet de factoriser un certain nombre de concepts et de théorèmes qui, sans elle, se voient disséminer dans une foule de théories — une mauvaise infinité, indubitablement.

Il existe naturellement bien d'autres concepts fondamentaux de la théorie des catégories : l'objet initial, l'objet terminal, le choix, la détermination, la section, la rétraction, le produit fibré, la limite, etc. Mais nous nous limiterons ici aux concepts qui serviront directement à la compréhension des analyses qui suivent.

1.2.3 La thématisation en théorie des catégories

Non moins que par ces concepts fondamentaux, la théorie des catégories se distingue par un tour d'esprit caractéristique, qui répond au concept de thématisation chez Cavaillès : chaque catégorie est munie de morphismes, c'est-à-dire d'actes, que l'on peut thématiser dans une nouvelle catégorie. À cet égard, il ne suffirait pas de dire que les catégoristes sont friands de thématisation :

c'est que de part en part et depuis son origine, la théorie des catégories *est* thématisation.

Grothendieck exprime dans toute sa pureté le recours totalement décomplexé des catégoristes à la quantification :

> Il est certain qu'il faut pouvoir considérer les catégories, foncteurs, homomorphismes de foncteurs etc... comme des objets mathématiques, sur lesquels on puisse quantifier librement, et qu'on puisse considérer à leur tour comme formant les éléments d'ensembles. (cité dans [Krömer 2004, 259])

« Quantifier librement », selon le mot de Grothendieck, pourrait être le slogan des catégoristes ; c'est-à-dire en particulier quantifier sur des morphismes, des morphismes de morphismes (*foncteurs*), des morphismes de morphismes de morphismes (*transformations naturelles*), etc. La thématisation survenait autrefois au terme d'un lent processus d'incubation, qui demandait des siècles, puis simplement des décennies, et elle était une question de génie : aujourd'hui immédiate en théorie des catégories, elle n'est plus qu'une question de réflexe.

On peut dire sur cette base que la théorie des catégories a fourni à la fois une illustration parmi d'autres et une formalisation par excellence du concept de thématisation.

Une *illustration parmi d'autres*, dans la mesure où Eilenberg et Mac Lane, fondateurs de la théorie des catégories, observant la répétition de gestes similaires d'une théorie à l'autre — morphismes de groupe, morphismes d'espaces vectoriels, morphismes d'espaces topologiques, etc. — en sont venus à dégager le concept unificateur de morphisme comme transformation préservant la structure. Ce faisant, ils ont bien généralisé la notion de morphisme, et pris comme objet ce qui précédemment n'était encore qu'acte sur des objets de plus bas niveau. Ils ont donc *appliqué* la notion de thématisation, et généralisé — donc élevé au paradigme — la notion de morphisme, en la rendant indifférente aux structures sur lesquelles elle porte.

Mais la théorie des catégories est aussi la *formalisation par excellence* des concepts de Cavaillès et tout particulièrement du concept de thématisation, dans la mesure où elle transforme en procédé mathématique ce qui, aux yeux de Cavaillès, restait dans les limites d'une analyse philosophique de l'histoire des mathématiques. Le concept philosophique est devenu concept mathématique, revenant par là même à la discipline dont, comme l'a vu Hourya Sinaceur [Sinaceur 1990, 2581], la pratique avait inspiré Husserl. La philosophie aurait ainsi donné aux mathématiques le moyen de penser de leurs propres forces le procédé qu'elles appliquaient implicitement.

La théorie des catégories, dont la naissance est contemporaine du dernier ouvrage de Cavaillès, procure donc à ses concepts cardinaux de paradigme et de thématisation une application en même temps qu'une formalisation.

1.2.4 Remarques historiques

Cavaillès s'étant d'abord fait connaître pour son étude soigneuse de l'histoire de la théorie des ensembles, on pourra être surpris de le voir rapprocher du point de vue catégoriel. Mais il serait réducteur de le considérer comme « le philosophe de la théorie des ensembles », car dans *Sur la logique et la théorie de la science*, celle-ci n'est plus au cœur de ses préoccupations. Comme l'observe Jan Sebestik :

> Dans ses deux thèses, *Méthode axiomatique et formalisme* et *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* (1938), Cavaillès étudia de l'intérieur la naissance de la théorie des ensembles et le problème des fondements des mathématiques, depuis sa « préhistoire » (Bolzano) jusqu'à l'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel et au programme de Hilbert avec ses avatars, aboutissant à la formalisation de la mathématique et de la logique, ainsi qu'à une vision nouvelle de la mathématique ouverte par les découvertes de Gödel. [. . .]
>
> Dans ses articles qui accompagnent et suivent ses thèses, Cavaillès change de registre : l'étude interne et technique du problème des fondements étant terminée, il peut maintenant modifier son approche, éclairer son propre travail par des mises en perspective, mettre l'accent sur des lignes de développement qui orientent le travail axiomatique des théories mathématiques. [Sebestik 2008, 91–92]

Ici, ce n'est plus tant le fondement des mathématiques qui intéresse Cavaillès, que les forces qui président à leur devenir. Ce changement de perspective est caractéristique du point de vue catégoriel, par opposition au point de vue ensembliste.

Or, ce changement de perspective n'est pas historiquement dénué d'échos, Cavaillès ayant fréquenté les milieux bourbakistes à l'École normale supérieure, à Strasbourg et — par la force des choses mais surtout des idées — à Clermont-Ferrand ; ayant également, comme Bourbaki, été influencé par les travaux d'Emmy Noether ; enfin, Ehresmann fut, avant de promouvoir la théorie des catégories [Ehresmann 1965], l'ami puis l'un des éditeurs posthumes de Cavaillès. On en trouve rétrospectivement un autre indice chez Saunders Mac Lane, lorsqu'il dégage de l'histoire des mathématiques deux formes principales de création d'objets, la généralisation et l'abstraction, en utilisant du reste les mêmes exemples que Cavaillès [Mac Lane 1986, 434–438]. Il ne s'agit évidemment pas de soutenir une invérifiable — et probablement inexistante — influence directe de Cavaillès sur la théorie des catégories, ou de la théorie des catégories sur Cavaillès : Eilenberg et Mac Lane n'étaient pas plus en contact avec Bourbaki qu'avec Cavaillès lorsqu'ils développèrent les concepts fondamentaux de la théorie des catégories. Mais il suffit d'indiquer qu'il existe dans les mathématiques et la philosophie de cette époque une tendance commune. Si Cavaillès, fusillé en 1944, n'eut pas le temps de connaître les concepts fondamentaux de la théorie des catégories, publiés en septembre 1945, il fréquenta le milieu où ces concepts étaient en train de naître.

1.3 Une « dialectique » hégélienne ?

Le mot de dialectique, sur lequel Cavaillès conclut *Sur la logique et la théorie de la science*, a des résonnances — platonicienne, kantienne et hégélienne — qui ne pouvaient manquer de susciter la curiosité des commentateurs. La question est disputée, de savoir si Cavaillès pensait à Hegel en terminant son ouvrage par l'idée d'un processus dialectique. Jean-Toussaint Desanti rejette fermement cette hypothèse : « Ce n'est pas à Hegel, dont il se défiait, qu'il pensait en écrivant ces mots » [Desanti 1981, IV]. Gilles-Gaston Granger, de son côté, privilégie l'hypothèse platonicienne : « Reste à élucider le sens exact de ce dernier mot, sens original chez Cavaillès, et en tout cas irréductible à celui qu'on trouve dans Platon ou chez Hegel, quoique peut-être moins éloigné encore du premier que du second » [Granger 1998, 72]. Enfin, Canguilhem estime que Hegel était encore trop méconnu en France avant les grands commentaires de Koyré et de Kojève [Canguilhem 1989, 686].

Mais Jules Vuillemin aurait tenu de Cavaillès lui-même l'aveu d'une référence à Hegel : se référant à la *Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962], Élisabeth Schwartz évoque une « puissante présence hégélienne, dont Jules Vuillemin nous disait tenir de Cavaillès que c'est bien elle que reconnaissait son maître disparu en évoquant la philosophie du concept » [Schwartz 2005, 23]. Mme Schwartz a ainsi pu montrer en quel sens Cavaillès « choisit le langage de Hegel pour dire la culmination de son spinozisme mathématique » [Schwartz 2006, 306], et comment la référence hégélienne permet d'éclairer le rapport, jamais rompu, de Cavaillès à l'idéalisme allemand [Schwartz 2006, 311–312 et 319 *sq.*].

En suivant cette hypothèse, nous allons tenter de donner un sens à l'interprétation de Hegel qu'elle peut présupposer. Car si l'allusion est bien hégélienne, on peut s'interroger sur la possibilité d'un retour à Hegel à partir de cette interprétation du processus dialectique. La métaphore est en effet toujours à double sens : le comparé rétroagit sur le comparant. La référence à Hegel n'est éclairante que si l'on détermine de *quel* Hegel il est question. Les notions de paradigme et de thématisation peuvent-elles nous éclairer sur le déroulement de la dialectique hégélienne ? Ou, en d'autres termes, quelle image Cavaillès pouvait-il avoir de la dialectique hégélienne — s'il s'agit bien d'elle — pour pouvoir lui comparer l'histoire des mathématiques ?

Nous ne disposons que de bien peu d'éléments sur l'interprétation de Hegel par Cavaillès ; en dehors d'une rapide mention dans *Sur la logique et la théorie de la science* [Cavaillès 2008, 5], ce nom n'apparaît pour ainsi dire jamais sous sa plume. Mais si l'on peut reconnaître dans la théorie des catégories l'application et la formalisation du concept de thématisation, alors l'allusion répétée du catégoricien William Lawvere à la logique hégélienne pourrait nous donner quelques pistes sur la nature de l'éventuel rapport entre logique hégélienne et thématisation.

2 Lawvere et le concept d'*Aufhebung* en théorie des catégories

La *Science de la logique* occupe une place centrale dans le système hégélien : elle est à la fois le point d'aboutissement de la *Phénoménologie de l'esprit* — car l'esprit parvenu au savoir absolu est mûr pour le développement d'une logique — et le point de départ de l'*Encyclopédie*. Or ce terme de « logique » ne pouvait laisser d'intriguer ceux qui, aujourd'hui, étudient ce qui porte désormais ce nom, à savoir un ensemble d'axiomes, de concepts, et même un certain style, hérité notamment de Frege et de Russell.

Mais la rencontre entre logique hégélienne et logique moderne a bien souvent été, de part et d'autre, décevante.

L'attitude la plus fréquente a été un rejet pur et simple de ce que Hegel appelle « logique ». Russell en montra l'exemple, en présentant comme une conversion salutaire sa « rébellion », qu'il date de la fin 1898, contre une pensée hégélienne dont il fut d'abord le disciple [Russell 1961, ch. 5]. Il ne manqua pas, par la suite, de railler la dialectique comme s'accommodant trop facilement des contradictions, et notamment du paradoxe du menteur, tandis que la logique formelle les considérait avec gravité [Russell 1961, 97]. Robert Blanché s'inscrit dans la lignée de Russell, en consacrant quelques lignes à peine aux logiques kantienne et hégélienne dans *La Logique et son histoire*, par ailleurs si complète : quelques lignes dans lesquelles il refuse à ces entreprises le nom même de logique [Blanché & Dubucs 1996, 247–248].

Constatant également que la logique hégélienne ne se laissait pas facilement exprimer dans la logique formelle héritée de Russell, d'autres prirent le parti inverse, et s'efforcèrent de mettre au pas la logique. On vit ainsi naître des systèmes parfois pathologiques, dont la seule finalité était d'autoriser la formalisation de la logique hégélienne. C'est ainsi que le logicien polonais Rogowski, espérant faire honneur à la pensée dialectique, développa des logiques multivalentes munies d'un nombre sans cesse croissant de valeurs de vérité.

Quoique opposées, ces deux attitudes procèdent d'un même point de vue sur la pensée hégélienne. Rejeter la logique hégélienne sous le prétexte qu'elle n'est pas formulable dans une logique standard ou adopter des logiques minoritaires pour comprendre Hegel, c'est cautionner l'idée selon laquelle la pensée hégélienne devrait, par quelque acte de foi, être adoptée ou rejetée, le passage de l'un à l'autre ne pouvant avoir lieu que sur le mode d'une conversion — mais surtout, et pire, d'une conversion *arbitraire*.

Or, par rapport à ce débat, il existe une initiative qui mérite d'être examinée dans toute son originalité, et qui fut celle de William Lawvere. À trois égards au moins, son travail est digne d'admiration. D'abord, ses travaux de recherche ont marqué définitivement l'histoire de la théorie des catégories ; c'est principalement à lui que l'on doit le point de vue selon lequel elle fournit un fondement universel et élégant pour les mathématiques.

Ensuite, Lawvere s'est distingué par la qualité de ses ouvrages de vulgarisation, qui fourmillent d'exemples concrets. Il est question de petits déjeuners préférés, de mouches qui volent et de restaurants chinois. La rigueur mathématique n'est pas pour autant sacrifiée sur l'autel de la pédagogie, et Saunders Mac Lane, cofondateur avec Samuel Eilenberg de la théorie des catégories, ne cache pas son admiration devant le livre *Conceptual Mathematics*, et la rigueur que Lawvere arrive à transmettre à ses étudiants [8].

Enfin, Lawvere a ceci de remarquable — et de rare — qu'il a toujours milité contre la séparation de la philosophie et des sciences ; non tant pour déplorer, comme on l'entend souvent, le faible niveau scientifique des philosophes que, plus originalement, pour critiquer la propension des scientifiques en général, et des mathématiciens en particulier, à ne s'intéresser tout au plus qu'aux fondements *mathématiques* de leur discipline en balayant d'un revers de main l'idée de fondements philosophiques. Lawvere se réclame en cela de Grassmann, qui n'imaginait pas écrire son *Ausdehnungslehre* de 1844 sans la précéder d'une introduction dans laquelle le concept d'algèbre linéaire se verrait déduire *a priori* de la nature de la pensée [Grassmann 1878, Introduction].

Mais l'intérêt pour l'œuvre de William Lawvere se redouble lorsque l'on s'aperçoit que, dans au moins quatre de ses articles sur la théorie des catégories, Lawvere fit allusion à la logique hégélienne [Lawvere 1989], [Lawvere 1991], [Lawvere 1992], [Lawvere 1996b]. Par rapport aux deux attitudes précédemment mentionnées sur le rapport entre logique formelle et dialectique hégélienne, cette interprétation catégoriste de la dialectique présenterait le grand intérêt, d'une part, de ne pas renoncer à comprendre Hegel, et de l'autre, de l'interpréter dans un cadre canonique et non dans quelque dialecte créé *ad hoc*.

2.1 Dialectique et mathématique

Lawvere se réclame d'un double héritage, qui est celui de Grassmann et, bien évidemment, de la théorie des catégories. Ce sont, selon lui, autant de bonnes raisons de vouloir maintenir un lien vivant entre mathématiques et philosophie.

Lawvere se réfère en effet à Grassmann, qui dans l'Introduction de l'*Ausdehnungslehre* de 1844 distinguait ainsi la dialectique et les mathématiques :

8. Notamment en ce qui concerne l'ordre des quantificateurs [Mac Lane 1997].

> L'opposition (*Gegensatz*) entre l'universel et le particulier détermine [...] la division des sciences formelles en dialectique et mathématique. La première est une science philosophique, en ce qu'elle recherche l'unité dans toute pensée, tandis que la mathématique a la direction opposée, en ce qu'elle appréhende tout ce qu'elle pense à chaque fois comme un particulier. [Grassmann 1878, xxii]

Lawvere formalise cette distinction de la manière suivante, fortement influencée par le graphisme traditionnel de la théorie des catégories :

$$\begin{tikzcd} \text{général} \arrow[d, bend left, "\text{mathématique}"] \\ \text{particulier} \arrow[u, bend left, "\text{dialectique}"] \end{tikzcd}$$

Mais c'est pour aussitôt ajouter que l'on ne saurait en rester à cette opposition entre mathématiques et dialectique :

> Nous avons besoin d'un instrument qui guide nos étudiants pour qu'ils suivent chacune de ces deux activités d'une manière unifiée, passant du général au particulier et du particulier au général. Je crois que la théorie des catégories mathématiques [...] peut incarner un tel instrument. [Lawvere 1996a, 256]

On remarquera au passage le soin avec lequel Lawvere articule les intérêts philosophiques et pédagogiques : quoi de plus hégélien que de maintenir ce lien entre encyclopédie et pédagogie ?

En termes catégoriels, l'espoir de Lawvere est que l'on puisse *dégager des morphismes entre la mathématique et la dialectique*, c'est-à-dire unifier ces deux disciplines, mais à un niveau supérieur, c'est-à-dire en passant par leur thématisation. Si mathématique et dialectique sont des morphismes entre le général et le particulier, les unifier ne sera possible qu'à la condition d'exhiber des morphismes entre ces morphismes.

$$\begin{tikzcd} \text{général} \arrow[d, bend left, "\text{mathématique}"] \arrow[d, phantom, "\rightleftarrows"] \\ \text{particulier} \arrow[u, bend left, "\text{dialectique}"] \end{tikzcd}$$

Il ne s'agit donc ni de réduire les mathématiques à la philosophie, ni de réduire la philosophie aux mathématiques, mais de dégager le fonds commun d'où naît leur distinction. C'est donc en un sens fort qu'il faut entendre le titre de *Conceptual Mathematics* que Lawvere donne à son livre d'introduction à la théorie des catégories [Lawvere & Schanuel 1991].

2.2 Dialectique et théorie des catégories

Dans son article de 1992 « *Categories of Space and of Quantity* », Lawvere montre que la théorie des catégories permet d'exprimer certains processus dialectiques à l'œuvre dans les mathématiques contemporaines. Celles-ci réalisent en effet à plus d'une occasion ce que Lawvere appelle une « unité et identité des opposés » (*Unity and Identity of Opposites*, qu'il appelle aussi UIO) : espace et quantité, quantité intensive et quantité extensive, général et particulier [Lawvere 1992, 14], etc. Le mot d'héroïsme n'est pas trop fort pour désigner le tour de force de Lawvere, dont l'article ne contient *strictement* aucun symbole mathématique, ni même d'ailleurs aucun nom de variable, fût-il aussi trivial que le nombre x, la fonction f ou l'objet A. L'article de 1992, en dépit ou peut-être en raison de son abstraction mathématique, n'est composé que de mots tirés du dictionnaire anglais.

Nous examinerons l'exemple de l'opposition entre l'espace et la quantité, pour voir comment, selon Lawvere, la théorie des catégories montre, à un niveau supérieur, leur identité.

Lawvere part de la définition du produit et du coproduit en théorie des catégories. Ceux-ci existent dans mainte structure mathématique, mais n'interagissent pas toujours de la même façon. Plus précisément, deux types de relations sont particulièrement fréquents, tout en étant mutuellement exclusifs : ou bien le produit est *distributif* sur le coproduit, ou bien les deux opérations sont *isomorphes*.

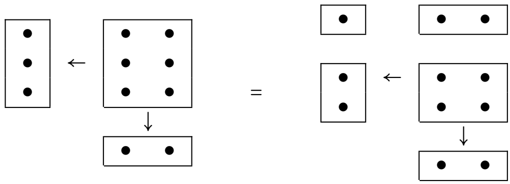
2.2.1 Catégories distributives

Lorsque le produit est distributif sur le coproduit, Lawvere parle de *catégorie distributive*. Par exemple, en arithmétique élémentaire, l'équation suivante est toujours valide :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Dans la théorie des ensembles, le produit cartésien est distributif sur l'union disjointe :

$$A \times (B \sqcup C) = (A \times B) \sqcup (A \times C)$$



Lawvere cite comme autres exemples de catégories distributives les ensembles continus, les espaces dérivables, mesurables et combinatoires. De ce que les catégories spatiales soient des catégories distributives, Lawvere induit que l'on peut utilement poser la réciproque, et identifier les « catégories de l'espace » aux catégories distributives.

2.2.2 Catégories linéaires

Par opposition aux catégories distributives, Lawvere définit les *catégories linéaires* par l'isomorphisme qui existe parfois entre le produit et le coproduit.

Nous pourrons expliquer cet isomorphisme par la notion de *somme directe* en algèbre linéaire. Munissons-nous de deux espaces vectoriels de dimension finie, par exemple une droite et un plan. Leur somme directe est l'espace vectoriel qui les envoie dans un seul et même espace vectoriel, en prenant garde à ce que leur télescopage se limite au strict minimum pour préserver la structure d'espace vectoriel ; en particulier, celui-ci ne doit contenir qu'un seul vecteur nul. Par conséquent, la somme directe consistera dans ce cas à forger un espace vectoriel à trois dimensions. La somme directe est donc bien l'incarnation du coproduit dans la catégorie des espaces vectoriels.

Mais une fois donnée cette somme directe, on peut également définir deux projections, qui permettent de rétablir les espaces vectoriels originaux. On peut en effet projeter notre espace à trois dimensions d'une part sur une seule de ses dimensions, de l'autre sur les deux dimensions restantes. Munie de ces morphismes projectifs, notre somme ressemble alors étrangement à un produit. C'est la raison pour laquelle, généralisant ce cas de figure où produit et coproduit sont isomorphes, Lawvere appelle catégories *linéaires* — comme on parle d'algèbre *linéaire* pour les espaces vectoriels — celles qui satisfont cet isomorphisme.

Il existe d'autres exemples de catégories linéaires : celle des groupes abéliens[9], celle des espaces vectoriels topologiques, etc. Dans la mesure où les

9. Prenons en effet le produit libre de deux groupes $(A,+)$ et $(B,+)$. Ses éléments sont de la forme $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n$. Le groupe étant commutatif, on peut réunir à gauche tous les a_i, à droite tous les b_i, pour obtenir $a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n$, que l'on peut simplifier en un certain élément $a_k + b_k$, isomorphe à un certain couple (a_k, b_k), le groupe des éléments ainsi générés par le produit libre étant isomorphe au produit direct $(A \times B, +)$. Dans la catégorie des groupes abéliens, la

vecteurs peuvent être vus comme des quantités, Lawvere propose d'identifier les catégories linéaires aux « catégories de quantité ».

2.2.3 Quantités d'espace et espaces de quantités

Les notions d'espace et de quantité ont été définies par Lawvere comme des catégories *opposées* : l'une satisfait la loi de distributivité du produit sur la somme, l'autre ne la satisfait pas. Bien loin de minimiser cette opposition, Lawvere va montrer comment chacun des opposés peut, à un niveau supérieur, verser dans l'autre : à cette fin, il décrit d'une part la génération de *quantités d'espaces*, de l'autre celle d'*espaces de quantités*.

Les quantités d'espace, pour commencer, correspondent selon Lawvere aux *quantités extensives*, c'est-à-dire aux quantités résultant d'une activité de mesure, telles que la masse et le volume ; elles se distinguent des *quantités intensives* telles que la densité, qui sont composées de *rapports* entre des quantités extensives [Lawvere 1992, 18]. Les quantités extensives montrent donc que l'on peut déterminer des morphismes, ou plus précisément des foncteurs, d'une catégorie distributive dans une catégorie linéaire. Elles mettent au jour d'authentiques « quantités d'espace ».

Mais le chemin inverse est également possible : il existe des foncteurs d'une catégorie linéaire dans une catégorie distributive. Si l'on considère en effet la variation d'une quantité, celle-ci, en tant que fonction, s'inscrit dans l'espace des fonctions. On peut donc forger des « espaces de quantité » tout autant que des « quantités d'espace ».

Ce que révèle cette dialectique, qui n'a rien d'artificiel, c'est que les catégories distributive et linéaire, ou plus spécifiquement d'espace et de quantité, ont beau être radicalement et définitivement opposées, il n'en est pas moins possible de définir des morphismes menant de chacune à l'autre ; ce qui évidemment ne peut se faire à leur propre niveau, où l'opposition demeure, mais seulement en passant au niveau de thématisation *immédiatement* supérieur, dans lequel les morphismes (ou actes) d'une catégorie distributive deviennent les objets d'une catégorie linéaire, et les morphismes d'une catégorie linéaire les objets d'une catégorie distributive.

$$\begin{tikzcd} \text{catégorie distributive} \arrow[loop above] \arrow[r, bend left, "\text{quantités d'espace}"] \arrow[r, phantom, "\downarrow\uparrow"] & \text{catégorie linéaire} \arrow[loop above] \arrow[l, bend left, "\text{espaces de quantité}"] \end{tikzcd}$$

somme et le produit sont donc isomorphes, ce qui n'est pas le cas en toute généralité dans la catégorie des groupes.

2.3 L'*Aufhebung* comme concept mathématique

Ayant montré par des exemples précis que les mathématiques contemporaines, grâce à la théorie des catégories, peuvent déterminer positivement l'unité et l'identité d'objets opposés, Lawvere entreprend de dégager la structure abstraite de ce processus dialectique.

Étant donnés deux objets, munis de morphisme menant du premier au second et du second au premier, Lawvere appelle *Aufhebung* la plus petite catégorie résolvant de cette manière les opposés d'une catégorie donnée [Lawvere 1989, 68]. C'est la raison pour laquelle il avance le terme de bicatégorie[10], celle-ci pouvant être représentée par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left] \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, phantom, "\downarrow\uparrow"] & & B \arrow[loop right] \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Un doute peut cependant subsister quant à l'usage que Lawvere réserve à la dialectique hégélienne : c'est qu'en aucun passage il n'est soutenu par la moindre citation précise. Ce silence, bien naturel dans la mesure où l'intention première de Lawvere est d'importer la dialectique dans la mathématique, ne peut manquer de laisser sur sa faim l'historien de la philosophie.

Aussi allons-nous tenter de donner un contenu à cette interprétation catégoriste de Hegel, en étudiant la dialectique de l'être et du néant, telle qu'elle est exposée dans trois textes majeurs : la *Science de la logique*, l'*Encyclopédie* et les *Leçons sur l'histoire de la philosophie*.

3 Hegel et la dialectique de l'être et du néant

La dialectique de l'être et du néant est peut-être, de toutes les *Aufhebungen* de l'*Encyclopédie*, celle que Hegel a le plus fréquemment et le plus longuement développée. Située au seuil du système, c'est en effet à elle qu'il incombe d'incarner la méthode. Elle est le fer de lance — d'autres diront le cheval de Troie — de la dialectique.

Or cette dialectique s'éclaire d'un jour particulier, une fois comparée aux *Leçons sur l'histoire de la philosophie* ; car on s'aperçoit vite, dans la section consacrée à la philosophie grecque, qu'il n'existe pas une, mais trois philosophies de l'être et du néant. La première est celle de Parménide et de Zénon, selon laquelle « l'être est, le non-être n'est pas » : cette pensée de l'être et du néant soutient l'exclusion mutuelle et définitive des deux concepts. La deuxième est celle d'Héraclite, qui montre la véritable voie à suivre, celle de l'unification des opposés. La troisième est l'atomisme de Leucippe et de

10. Le concept de bicatégorie a été défini pour la première fois par Mac Lane [Mac Lane 1950].

Démocrite, parodie de dialectique qui n'aurait spéculativement rien de satisfaisant, sinon précisément à titre de contre-exemple.

3.1 Éléatisme et catégorie discrète

L'éléatisme tient tout entier dans l'énoncé parménidien : « L'être est, le non-être n'est pas. » Tout en reconnaissant aux Éléates le mérite d'avoir exprimé la première authentique pensée conceptuelle, Hegel ne manque pas, dans les *Leçons sur l'histoire de la philosophie*, de pointer l'extrême « pauvreté » de leur point de vue, qui correspond très précisément à l'abstraction et à la pauvreté des concepts d'être et de néant en général dans la *Science de la logique*.

Du point de vue de la théorie des catégories, étant donné les deux opposés que sont l'être et le néant, l'éléatisme se limiterait à l'affirmation triviale des morphismes identité définis sur chacun d'entre eux :

$$\begin{tikzcd} \text{être} \arrow[loop left] & \text{néant} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Cette pensée se contente de gloser une opposition considérée comme donnée, sans la remettre en question, et en la munissant simplement d'identités, c'est-à-dire de tautologies.

Telle est la forme abstraite de l'opposition de l'être et du néant, pensée et exprimée par l'éléatisme. La catégorie ainsi définie est parfois appelée $\mathbf{1}+\mathbf{1}$, et elle est un exemple de catégorie discrète : « Une catégorie est *discrète* quand chaque flèche est une identité » [Mac Lane 1969, 11]. Ce type de catégorie, comme l'éléatisme selon Hegel, a généralement peu de choses à nous apprendre : elle est fondamentalement pauvre.

3.2 Héraclitéisme et bicatégorie

La dialectique de l'être et du néant dans la *Science de la logique* pose le concept de *devenir* comme « exemple le plus proche » [Hegel 1970, 353] d'unité des concepts de l'être et du néant.

En toute rigueur, bien d'autres concepts unifient ces deux concepts, non seulement celui de commencement [Hegel 1970, 353], mais également tous les concepts ultérieurs : être-là, être-pour-soi, quantité, etc. Pour prendre des exemples bien ultérieurs, la *vie* n'est pas concevable sans cette unité de l'être et du néant, pas plus que l'*esprit* [Hegel 1970, 524]. Mais si chacun de ces concepts ultérieurs contient cette unité de l'être et du néant, c'est d'une part parce qu'ils présupposent le concept de devenir, de l'autre en y ajoutant bien plus de déterminations qu'il n'est nécessaire. Le rôle privilégié du devenir à cet égard est d'être le concept *minimal* synthétisant de manière concrète ces deux concepts opposés. Le concept de commencement est, quant à lui, « également proche ». Il est donc substituable à celui du devenir : « La Chose, dans son commencement, *n'est pas* encore, cependant il n'est pas simplement son *néant*, mais en lui il y a aussi son *être* » [Hegel 1970, 353]. C'est donc à Héraclite que revient le mérite d'avoir découvert « le premier concret, l'absolu en tant qu'ayant en lui l'unité de termes opposés » [Hegel 1971, t. XVII, 344], que Hegel appelle encore « la première unité de déterminations opposées » [Hegel 1971, t. XVII, 350].

Ce qui est essentiel à cette synthèse vivante de l'être et du néant, ce sont les passages qui s'ouvrent entre les deux concepts :

> Ce qui est la vérité, ce n'est ni l'être ni le néant, mais le fait que l'être — non point passe — mais est passé en néant, et le néant en être. Pourtant leur vérité, tout aussi bien, n'est pas leur état-de-non-différenciation, mais le fait qu'ils sont absolument différents, et que pourtant, tout aussi immédiatement, chacun disparaît dans son contraire. Leur vérité est donc ce mouvement du disparaître immédiat de l'un dans l'autre : *le devenir* ; un mouvement où les deux sont différents, mais par le truchement d'une différence qui s'est dissoute tout aussi immédiatement. [Hegel 1972, 23]

Dans les *addenda* de l'*Encyclopédie*, Hegel précise, s'il en était besoin : « Dans l'histoire de la philosophie, c'est le système d'Héraclite qui correspond à ce degré de l'Idée logique » [Hegel 1970, 523].

En termes catégoristes, on peut dire que l'héraclitéisme munit le couple de l'être et du néant de deux nouveaux morphismes : l'un de l'être vers le néant, qui est le fait de passer, c'est-à-dire de glisser du présent (qui est) vers le passé (qui n'est pas) ; l'autre du néant vers l'être, à savoir l'advenir, fait de glisser du futur (qui n'est pas) vers le présent (qui est). Il existe donc des morphismes entre ces deux objets que sont l'être et le néant : ceux-ci ne sont pas isolés, confinés dans leurs identités respectives.

$$\begin{tikzcd}
\text{être} \arrow[loop left] \arrow[r, bend left, "\text{passer}"] \arrow[r, phantom, "\downarrow \text{devenir} \uparrow"] & \text{néant} \arrow[loop right] \arrow[l, bend left, "\text{advenir}"]
\end{tikzcd}$$

Le concept de devenir correspond à la théorie, non plus véritablement de l'être et du néant qui en deviennent des abstractions ou plutôt des appauvrissements, mais du passer et de l'advenir. Étudier les relations entre ces deux nouveaux objets, ou plus précisément entre ces deux morphismes, est l'apport de l'héraclitéisme. La dialectique, dans ce cas concret, peut donc être décrite comme une bicatégorie, c'est-à-dire une catégorie munie évidemment de morphismes entre objets, mais surtout de morphismes entre ces morphismes.

Certes, le concept de devenir est encore abstrait chez Héraclite, mais il a du moins le mérite de montrer la marche à suivre ; et que ce concept soit encore abstrait est tout simplement le signe que la dialectique est loin d'être achevée.

3.3 Atomisme et catégorie linéaire

À ce stade de la dialectique, telle que la présentent l'*Encyclopédie* et la *Science de la logique*, l'affaire est close. Mais l'histoire de la philosophie, comme toute histoire, connaît parfois des ralentissements, sinon certaines formes de régression. La dialectique de l'être et du néant en a connu une dans la figure de l'atomisme de Leucippe et de Démocrite.

La philosophie d'Empédocle avait servi d'avertissement : il existe parfois, dans l'histoire de la philosophie, de fausses synthèses, des parodies de dialectique, que Hegel frappe généralement du simple mot de *Synthese* [Hegel 1971, t. XVII, 379–380], ou d'*Eklektismus*[11] [Hegel 1975, t. XIX, 31–35]. Cette pensée se contente, face à une opposition donnée, de mélanger les opposés et de présenter ce mélange — mélange des quatre éléments, mélange d'amour et de haine — comme leur unification.

L'atomisme de Leucippe et de Démocrite est parti, selon Hegel, du même principe que l'éléatisme : le même ne naît que du même, et rien ne naît de rien. Mais à la différence des Éléates, les atomistes n'en sont pas restés à cette opposition formelle, et ont voulu dépasser cette contradiction. Ils ont ainsi traduit l'opposition de l'être et du néant en celle de l'atome et du vide [Hegel 1971, t. XVII, 386], puis se sont contentés de « mélanger » le vide et le plein. Mais les opposés ne sont unifiés que de manière très superficielle : il y a là « une *synthèse* qui n'est pas déterminée par la nature de ce qui est réuni, mais où au fond ces étants en soi et pour soi demeurent séparés » [Hegel 1971, t. XVII, 388]. L'atomisme, à l'instar de la *Synthese* empédoclienne, projette donc tout simplement les opposés dans des régions différentes du réel. Ce procédé qui permet de concilier toute chose avec son opposé, pour peu que l'on prenne garde au télescopage, a un nom en théorie des catégories : il s'agit de la somme.

$$\begin{tikzcd} \text{être} \arrow[dr, "\text{atome}"] & & \text{néant} \arrow[dl, "\text{vide}"'] \\ & \text{monde} = \text{être} + \text{néant} & \end{tikzcd}$$

Mais on peut également munir cette nouvelle catégorie de morphismes de projection : en faisant abstraction du néant qu'il y a dans le réel — le vide — on retrouve dans l'atome les grandes lignes de la théorie éléate de l'être ; et en faisant abstraction de ce qu'il y a d'être dans le monde, on retrouve les grandes lignes de la théorie éléate du néant. Dans la mesure où ces deux projections existent aux yeux de Hegel, la somme peut tout aussi bien être conçue comme

11. Hegel y sauve les néoplatoniciens de l'accusation d'éclectisme : ces philosophes n'ont pas juxtaposé des théories opposées comme on rapièce un vêtement, mais leur ont donné une unification concrète.

un produit. La catégorie est donc vraisemblablement linéaire, dans la mesure où la somme et le produit sont isomorphes.

$$\begin{tikzcd}
\text{être} & & \text{néant} \\
& \text{monde} \arrow[ul, "\text{atome}"] \arrow[ur, "\text{vide}"'] &
\end{tikzcd}$$

Les analyses de Lawvere peuvent donc être prolongées. Non seulement le processus dialectique, celui de l'unité et de l'identité des opposés, peut être décrit comme une *bicatégorie*, mais le lexique de la théorie des catégories permet également de distinguer la véritable dialectique et ses deux antagonistes, qui ne sont que deux variantes de la pensée d'entendement — celle qui ne thématise pas. En rester à l'opposition formelle de deux concepts, c'est en effet demeurer dans une *catégorie discrète* ; et vouloir rassembler les opposés de manière purement extérieure, c'est se contenter de la *somme* catégorielle, ou tout aussi bien du produit catégoriel, d'une *catégorie linéaire*.

Cette représentation mathématisée de la dialectique hégélienne passera peut-être pour suspecte. Ne revient-elle pas à mécaniser, par conséquent à dévitaliser la philosophie hégélienne, en la remplaçant par de purs jeux formels sur des flèches et sur des flèches entre flèches, en perdant au passage la signification intuitive des concepts mis au jour par la dialectique ? Mais c'est un formalisme dont Lawvere a voulu se défendre.

> Ce qui est particulièrement frappant, c'est que l'analyse hégélienne de *n'importe quel* topos s'avère impliquer des monoïdes graphiques qui sont en réalité des bicatégories. Ainsi, l'organisation de n'importe quelle branche de la connaissance, pour autant qu'elle puisse être mathématique (c'est-à-dire enseignable), peut dans une certaine mesure se refléter dans des représentations graphiques. Quoique proposée voici près de 200 ans, la méthode hégélienne d'analyse a été largement sous-utilisée depuis cette époque ; des prétentions idéologiques prétendument contradictoires, affirmant soit qu'elle est incohérente soit que sa fluidité est trop admirable pour être mathématisée, ont conspiré contre une large diffusion de son enseignement. Nous croyons avoir montré par quelques modestes exemples qu'elle est cohérente (et non-triviale), et qu'une grande partie de la méthode peut être mathématisée, au service de ceux qui veulent l'utiliser sérieusement, *y compris pour cette partie qui reste fluide*. [Lawvere 1989, 52–53. Nous soulignons.]

C'est donc à une véritable défense et illustration de la méthode dialectique que Lawvere a voulu se consacrer. Tâche dont un homme ne saurait vraisemblablement s'acquitter seul : il faut « clarifier l'utilité de ces interprétations particulières de la méthode dialectique de recherche ». Mais pour cela, ajoute Lawvere, « nous avons grand besoin de l'aide des philosophes et mathématiciens intéressés » [Lawvere 1992, 30].

Conclusion

Cet appel de William Lawvere aux philosophes ne faisait peut-être que renouer avec les sources philosophiques de la théorie des catégories : peu après que Cavaillès a observé et conceptualisé un phénomène inhérent à l'histoire et à la pratique des mathématiques, des mathématiciens ont à leur tour thématisé ce processus, donnant naissance à la théorie des catégories, illustration et formalisation de cette activité. La pratique mathématique se vit ainsi formuler par des concepts philosophiques, qui à leur tour purent être formalisés par des concepts mathématiques. Par la thématisation, la pratique mathématique devient elle-même objet de connaissance mathématique.

Hegel distinguait les connaissances philosophique et mathématique par l'absence de dialectique de la seconde [Hegel 2006, Préface, XLVIII *sq.*]. En décrivant la nature dialectique de la pratique mathématique, Cavaillès et Lawvere ont paradoxalement montré, contre Hegel, ce que l'histoire des mathématiques avait de profondément hégélien : le concept philosophique immanent au concept mathématique.

Bibliographie

Asperti, Andrea & Longo, Giuseppe

1991 *Categories, Types, and Structures. An Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist*, Foundations of Computing, Cambridge : MIT Press.

Blanché, Robert & Dubucs, Jacques

1996 *La Logique et son histoire*, U Philosophie, Paris : Armand Colin.

Canguilhem, Georges

1989 Une vie, une œuvre. 1903–1944, Jean Cavaillès, philosophe et résistant, dans *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, édité par Cavaillès, Jean, Hermann, 683–686, 1994.

Cavaillès, Jean

1981 *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris : Hermann.

2008 *Sur la logique et la théorie de la science*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Vrin.

Desanti, Jean-Toussaint

1981 Souvenir de Jean Cavaillès, dans *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, édité par Cavaillès, Jean, Paris : Hermann, I–IV.

1999 *Variantes philosophiques 2 : Philosophie, un rêve de flambeur*, Figures, Paris : Grasset.

Ehresmann, Charles

1965 *Catégories et structures*, Travaux et recherches mathématiques, Paris : Dunod.

Granger, Gilles-Gaston

1988 *Pour la Connaissance philosophique*, Paris : Odile Jacob.

1998 Jean Cavaillès et l'histoire, *Philosophia Scientiæ*, 3(1), 65–77.

Grassmann, Hermann Günther

1878 *Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Leipzig : O. Wigand.

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich

1970 *Encyclopédie des sciences philosophiques, I. La science de la logique*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Vrin, 1994.

1971 *Leçons sur l'histoire de la philosophie, I. La philosophie grecque, de Thalès à Anaxagore*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Vrin.

1972 *Science de la logique. L'être. Édition de 1812*, Bibliothèque philosophique, Paris : Aubier-Montaigne, 1987.

1975 *Leçons sur l'histoire de la philosophie, IV. La philosophie grecque : le dogmatisme et le scepticisme, les néoplatoniciens*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Vrin.

2006 *Phénoménologie de l'esprit*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Vrin.

Krömer, Ralf

2004 *La théorie des catégories : ses apports mathématiques et ses implications épistémologiques. Un hommage historico-philosophique*, Thèse de doctorat, Université Nancy 2 - Universität des Saarlandes.

Lawvere, F. William

1989 Display of Graphics and their Applications, as Exemplified by 2-Categories and the Hegelian "Taco", dans *Proceedings of the First International Conference on Algebraic Methodology and Software Technology*, University of Iowa, 51–75.

1991 Some thoughts on the future of category theory, *Lecture Notes in Mathematics*, 1488/1991, 1–13.

1992 Categories of space and of quantity, dans *The Space of Mathematics : Philosophical, Epistemological and Historical Explorations*, Berlin : DeGruyter, 14–30, International Symposium on Structures in Mathematical Theories (1990), San Sebastian, Spain.

1996a Grassmann's dialectics and category theory, dans *Proceedings of the 1994 Conference to commemorate 150 years of Grassmann's "Ausdehnungslehre", Hermann Guenther Grassmann (1809-1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar, Boston Studies in the Philosophy of Science*, édité par Schubring, Gert, Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, t. 187, 255–264.

1996b Unity and identity of opposites in calculus and physics, *Applied Categorical Structures*, 4, 167–174, 10.1007/BF00122250. dx.doi.org/10.1007/BF00122250.

Lawvere, F. William & Schanuel, Stephen H.

1991 *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge : Cambridge University Press, 1997.

Mac Lane, Saunders

1950 Duality for groups, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56(6), 485–516.

1969 *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, New York : Springer, 1991.

1986 *Mathematics : Form and Function*, New York : Springer.

1997 Reviewed work : Conceptual mathematics : A first introduction to categories by F. William Lawvere ; Steven Schanuel ; Emilio Faro ; Fatima Fenaroli ; Danilo Lawvere ; Students of Mathematics 108 of the University of Buffalo, *The American Mathematical Monthly*, 104(10), 985–987.

Russell, Bertrand

1961 *Histoire de mes idées philosophiques*, Tel, Paris : Gallimard.

Schwartz, Élisabeth

2005 Histoire des mathématiques et histoire de la philosophie chez Jules Vuillemin, dans *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'œuvre de Jules Vuillemin*, édité par Rashed, Roshdi, Sciences dans l'histoire, Paris : Albert Blanchard, 1–28.

2006 Jean Cavaillès (1903–1944), *Revue d'Auvergne*, 580–581, 305–329.

Sebestik, Jan

2008 Postface, dans *Sur la Logique et la théorie de la science*, édité par Cavaillès, Jean, Bibliothèques des textes philosophiques, Paris : Vrin, 91–142.

Sinaceur, Hourya

1990 *Encyclopédie philosophique universelle*, Paris : Presses Universitaires de France, t. II, chap. Thématisation, 2581–2582.

1994 *Jean Cavaillès. Philosophie mathématique*, Philosophies, Paris : Presses Universitaires de France.

Vuillemin, Jules

1962 *La Philosophie de l'algèbre. I. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'Algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : Presses universitaires de France.